Sistemul natural de unități

Sistemul de unități internaționale (SI) - trei etaloane de măsură

[*lungime*]SI = 1 *m (metru)*
[*timp*]SI = 1 *s (secundă)*
[*masă sau energie*]SI = 1 *kg* (*kilogram*) sau 1 *J (joule)*

putin practice la scară subatomică!!!
(proprietățile relativiste şi cuantice nu pot fi neglijate)

constante fundamentale - viteza luminii în vid, *c* şi cuanta momentului cinetic $\hbar$

În sistemul internațional

$$c = 3 \cdot 10^{8}\ m \cdot s^{-1}$$

$\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s = 6.58 \cdot 10^{-22}\ MeV \cdot s$, unde $1\ MeV = 10^{6}\ eV$
$1 eV$ *(electron-volt)* $= 1.602 \cdot 10^{-19}\ J$

Pentru sisteme cuantice relativiste
- viteza ca fracțiune din viteza luminii *c*
- momentul cinetic (*spin*) în termeni de unități $\hbar$

sistemul de măsură în care unele constante universale sunt normate la unitate (egale numeric cu 1) poartă numele de sistem de unități naturale (SUN)

[*viteza*]$_{SUN}$ = 1 *c*
[*momentul cinetic*]$_{SUN}$ = 1 $\hbar$
[*energia*] = 1 *eV* cu multiplii *MeV* = 10^6 eV, *GeV* = 10^9 *eV*

$\hbar = c = 1$

$m_{electron}$ - 0.511 *MeV*

Pentru metru - se împarte prin $\hbar c$ (în SI se exprimă prin *MeV·s*)

$$\frac{1m}{c\cdot\hbar} = \frac{1m}{3\cdot10^{8}\cdot m\cdot s^{-1}\cdot 6.58\cdot10^{-22}\,MeV\cdot s} = 5.1\cdot10^{12}\,MeV^{-1}$$

Pentru secundă se împarte prin $\hbar$ (în SI se exprimă prin *MeV·s*)

$$\frac{1s}{\hbar} = \frac{1s}{6.58\cdot10^{-22}\,MeV\cdot s} = 1.52\cdot10^{21}\,MeV^{-1}$$

unitățile de lungime şi de timp pot fi exprimate în sistemul natural de unități prin inversul unităților de energie !!!

[*lungime*]SUN = [*masă sau energie*]$^{-1}$
[*timp*]SUN = [*masă sau energie*]$^{-1}$

Regulă generală
-o cantitate în sistemul SI care are dimensiunile $[E^p L^q T^r]_{SI}$ cu *E*, *L* şi *T* reprezentând energia (în *Jouli*), lungimea (în *metri*) şi timpul (în *secunde*), adică $J^p \cdot m^q \cdot s^r$, în SUN, aceste cantităţi vor fi exprimate în *energie* la puterea *p-q-r* adică E^{p-q-r}.

Conversia din SI în SUN

dacă în SI, *E*, *L* şi *T* reprezintă unităţi de *energie*, *lungime* şi *timp*, avem corespondenţa:

$$[E^p L^q T^r]_{SUN} = \left[E^p \left(\frac{L \cdot 2\pi}{h \cdot c} \right)^q \left(\frac{T \cdot 2\pi}{h} \right)^r \right]_{SI} = \left[\frac{E^p L^q T^r (2\pi)^{q+r}}{c^q \cdot h^{q+r}} \right]_{SI} =$$

$$= [E^p L^q T^r] \cdot \left(6.24 \cdot 10^9 MeV \cdot J^{-1}\right)^p \cdot \left(5.1 \cdot 10^{12} MeV^{-1} \cdot m^{-1}\right)^q \cdot \left(1.52 \cdot 10^{21} MeV^{-1} \cdot s^{-1}\right)^r$$

$[A]_{SUN}$ şi $[A]_{SI}$ sunt mărimile în sistemul natural, respectiv în sistemul internaţional

Concret

Din SI la SUN se trece simplu prin înlocuirea *Joul*, *metru* şi *secundă* prin factorii:

Energie:	$J \to 6.24 \cdot 10^{12}\ MeV$
Lungime:	$m \to 5.1 \cdot 10^{12}\ MeV^{-1}$
Timp:	$s \to 1.52 \cdot 10^{21}\ MeV^{-1}$

Invers, din SUN în SI, unitățile asociate se fac prin conversia:

Energie:	$MeV \to 1.602 \cdot 10^{-13}\ J$
Lungime:	$MeV^{-1} \to 1.96 \cdot 10^{-13}\ m$
Timp:	$MeV^{-1} \to 6.58 \cdot 10^{-22}\ s$

Pentru sisteme cuantice relativiste, utilizarea sistemului de unități SUN are două mari avantaje: două etaloane sunt definite $\hbar = c = 1$

permite reprezentarea tuturor ecuațiilor

exemplu: $$\underbrace{E^2 = p^2c^2 + m^2c^4}_{\text{SI}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{E^2 = p^2 + m^2}_{\text{SUN}}$$

Mărimea fizică	SI	SUN ($\hbar = c = 1$)
masă	kg	5.61×10^{26} GeV
lungime	m	5.07×10^{15} GeV
timp	s	1.53×10^{24} GeV
sarcina electrică	C	1.89×10^{18}
temperatura	K	8.62×10^{-14} GeV
forța	N	1.37×10^{-6} GeV^2
energia	J	6.93×10^{9} GeV
puterea	W	4.56×10^{-15} GeV^2
potențialul	V	29.7 GeV
câmpul electric	V/m	5.86×10^{-15} GeV^2
curentul	A	9.58×10^{7} GeV^{-1}
inducția magnetică	T	1.50×10^{-8}
flux magnetic	Wb	3.86×10^{23} GeV^{-2}
rezistența electrică	Ohm	3.10×10^{-7} GeV^2
capacitatea electrică	F	4.49×10^{28} GeV^{-1}
inductanța	H	6.37×10^{23} GeV^{-1}

Formalismul relativist cuadridimensional

Teoria relativității -similitudinea timp - spațiu→ formalism cuadridimensional

vectorul de poziție spațială – timp, ***x*** este reprezentat prin componentele contravariante x^{μ} (indicele superior)

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x) = (t, x)$$

într-un spațiu vectorial cu D dimensiuni este posibil de a adăuga D vectori în baza e^{μ}, astfel că un vector **A** poate fi scris în 4 dimensiuni astfel:

$$\boxed{A = \sum_{\mu=0}^{3} A^{\mu} \cdot e_{\mu} = A^{\mu} \cdot e_{\mu}}$$

(***formalismul Einstein în care se repetă indicele covariant – contravariant***)

Produsul scalar a doi vectori **A şi B**

$$\boxed{\boldsymbol{A \cdot B} = A^{\mu} e_{\mu} B^{\nu} e_{\nu} = A^{\mu} B^{\nu} g_{\mu\nu}}$$

$g_{\mu\nu} = e^{\mu} \cdot e^{\nu}$ - tensor matricial sau metrică

Se poate alege o bază unde vectorii sunt ortogonali: $g_{\mu\nu} = 0$ dacă $\mu \neq \nu$

ca urmare $$\boxed{A \cdot B = A^{\mu} \cdot B^{\nu} \cdot e_{\mu\nu}^{2}}$$

Pentru cazul cuadridimensional spațiu – timp, în spațiul Minkovski, lungimea cuadridimensională a unui vector de poziție spațiu – timp este realizat pe un interval

$$\boxed{x^2 = x^{\mu} \cdot x^{\mu} \cdot e_{\mu\nu}^{2} = t^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

Astfel că, norma vectorilor de bază va fi: $$e_{\mu}^{2} = \begin{cases} 1, & \mu = 0 \\ -1, & \mu = 1,2,3 \end{cases}$$

iar tensorul metric $$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Componentele covariante (indice inferior) sunt proiecțiile ortogonale ale lui A pe vectorii de bază e_μ

Exemplu: $e_\mu \cdot \boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A}_\mu$

Sau (se notează indicele inferior)

$$\boxed{A_\mu \equiv e_\mu \cdot A = e_\mu \cdot A^\nu \cdot e_\nu = g_{\mu\nu} \cdot A^\nu}$$

tensorul metric $g_{\mu\nu}$ şi inversul său $g^{\mu\nu}$ coincid $$g_{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu}\right)^{-1} = g^{\mu\nu}$$

Prin urmare $$g^{\mu\nu} \cdot g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu$$

De unde rezultă $$A^\mu = g^{\mu\nu} \cdot A_\nu$$

deci $$g^{\mu\nu} \cdot g_{\mu\nu} = 4$$

Cuadrivectorul de poziție

componentele covariante:

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x})$$

componentele contravariante

$$x_{\nu} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = g_{\mu\nu} x^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$$

Prin urmare

$$x^{\mu} = (x^0, \mathbf{x})$$

$$x_{\mu} = (x^0, -\mathbf{x})$$

Cuadrivectorul energie – impuls

$p^{\mu} = (E, p_x, p_y, p_z)$

$E = \gamma \cdot m_0$ - energia totală
p_i ($i = x, y, z$ sau $1,2,3$)- componentele impulsurilor
m_0 - masa de repaus

Energia cinetică $K = E - m_0 = (\gamma - 1)m_0$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$ factor Lorentz

Cuadrivectorul p^{μ} este un invariant Lorentz: (se lucrează în SUN, adică c = 1)

$$p^2 = g_{\alpha\beta} \cdot p^{\alpha} \cdot p^{\beta} = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = E^2 - |p|^2 = m_0^2$$

Aşadar,

$$E^2 - p^2 = m_0^2$$

sau

$$E^2 = p^2 + m_0^2$$

Conservarea energiei şi impulsului pentru un sistem de particule

Cuadrivectorul energie – impuls total

$$p^{\mu} = \sum_{n} p_{n}^{\mu}$$

p_{n}^{μ} - impulsul cuadridimensional al particulei n

conservarea energiei şi impulsului $p_{init}^{\mu} = p_{final}^{\mu}$ (μ = 0, 1, 2, 3)

Pentru μ = 1, 2, 3 = i avem conservarea impulsului total:

$$p_{init}^{i} = p_{final}^{i} \quad \text{sau} \quad \vec{p}_{init} = \vec{p}_{final}$$

Pentru μ = 0 avem conservarea energiei totale:

$$p_{init}^{0} = p_{final}^{0} \quad \text{sau} \quad E_{init}^{tot} = E_{final}^{tot}$$

Relația în sistemul centrului de masă

Premize:
- Conservarea energiei – impuls total (p^μ se conservă)
- Mărimea ($E^2 - p^2$) este un invariant relativist (are aceeaşi mărime în toate sistemele de referință)

într-un sistem de referință S: $$\left(p^\mu_{init}\right)^2_S = \left(p^\mu_{final}\right)^2_S$$

în alt sistem S':
$$\left(p^\mu_{init}\right)^2_S = \left(p^\mu_{final}\right)^2_S = \left(p^\mu_{final}\right)^2_{S'}$$
(invariant relativist)

Consecință:
într-un proces de interacțiune cantitatea $p^2 = p^\mu p_\mu$ se conservă în orice sistem de referință

în sistemul centrului de masă (SCM)
– centrul de masă al sistemului este în repaus, impulsul este nul)

$$\left(p^\mu_{init}\right)^2_S = \left(p^\mu_{final}\right)^2_S = \left(p^\mu_{init}\right)^2_{SCM} = \left(p^\mu_{final}\right)^2_{SCM}$$

Întrucât, în SCM vectorul impuls este nul $|\mathbf{p}| = 0$

$$\left(p^\mu_{init}\right)^2_{SCM} = \left(p^0_{init}\right)^2_{SCM} - \left(|p|_{init}\right)^2_{SCM} = \left(p^0_{init}\right)^2_{SCM} = \left(E^{tot}_{init}\right)_{SCM} = \left(\sum_n E_n\right)^2_{SCM}$$

Noțiuni de mecanică cuantică relativistă

În mecanica clasică, mişcarea unei particule sau a unui grup de particule poate fi exprimată în termeni de poziție a particulei al un anumit moment

În mecanica cuantică, o stare (sau o mişcare) a unei particule este exprimată în termeni de funcții de undă care reprezintă probabilitatea ca o particula sa ocupe o anumita poziție la un moment dat. Cu ajutorul operatorilor putem obține în principal valorile observabilelor, cum ar fi impulsul, energia, etc.

În mecanica cuantică relativistă, o stare sau o mişcare este exprimată în spațiu şi timp.Ecuațiile de mişcare sunt exprimate cu ajutorul langrangianului

Miscarea nerelativista pentru particule cu spin 0

Relatia energie-impuls in mecanica clasică $$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V = E$$

Transformari in mecanica cuantică $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ $\quad \mathbf{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla,$

sau $\mathrm{H} \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ $\quad \mathrm{p} \equiv \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right) = -i\hbar \nabla$

Miscarea unei particule caracterizata de functia de unda Ψ , intr-un camp de forte este data de ecuatia Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$|\psi|^2$ – reprezinta probabilitatea de a gasi particula de masa m intr-un punct spatial caracterizat de coordonatele (x,y,z)

Miscarea relativista pentru particule cu spin 0

Ecuația Klein – Gordon

Trecerea de la mecanica cuantică la mecanica cuantică relativistă se face practic prin generalizarea ecuației lui Schrödinger pentru un sistem relativist.

Într-un spațiu cuadridimensional (ђ = c = 1) se scrie

$$p^{\mu} = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar\nabla \right) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = i\partial^{\mu}$$

Relatia relativistă energie-impuls

$$p_{\mu}p^{\mu} = E^2 - \left|\vec{p}\right|^2 = m^2$$

Substituind mărimile din ecuația Schrödinger relativistă cu reprezentările operatoriale (ђ = c = 1) se obține ecuația Klein – Gordon

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \Psi - \left(-i\hbar\nabla \right)^2 \Psi = m^2\Psi \Leftrightarrow -\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + \nabla^2\Psi = m^2\Psi$$

sau

$$0 = -\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\Psi + m^2\Psi = \left(-\partial_\mu \partial^\mu - m^2\right)\Psi = \left(p^2 - m^2\right)\Psi$$

$$\boxed{-\partial_\mu \partial^\mu \Psi - m^2 \Psi = 0}$$

Ecuația Klein – Gordon

In care

$$p^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\partial^\mu$$

$$p_\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = -i\partial_\mu$$

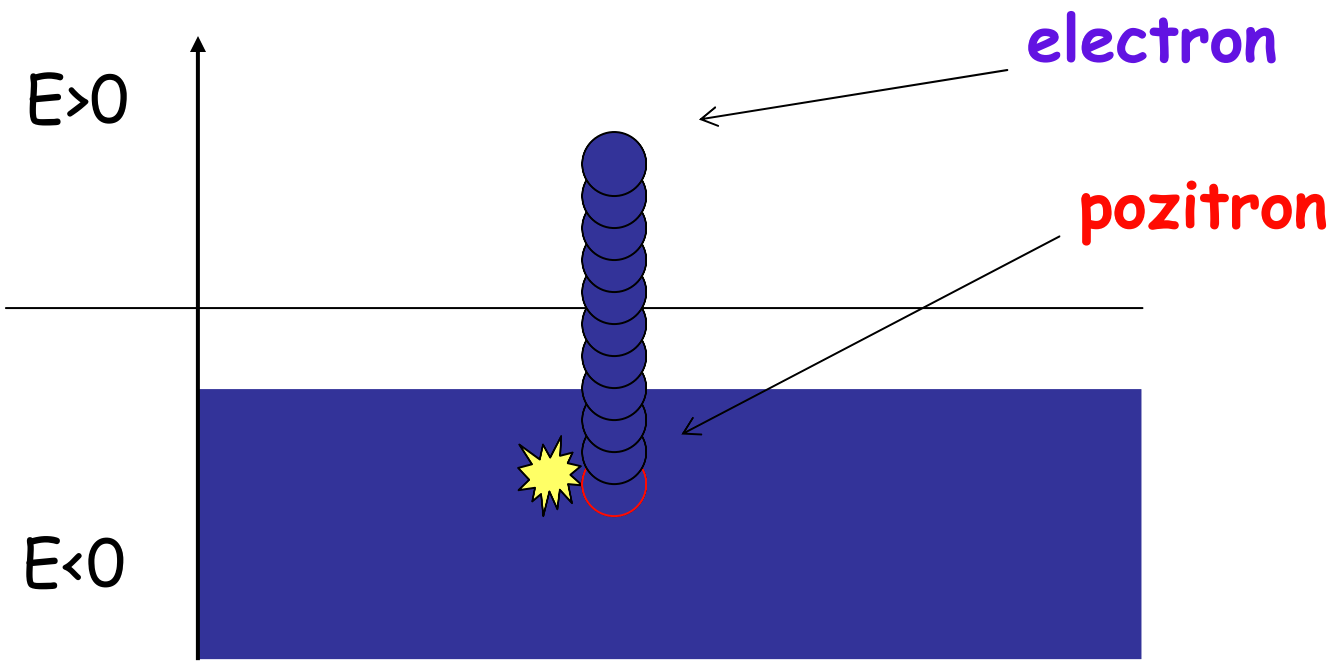
Ecuația Klein – Gordon este versiunea relativistă a ecuației lui Schrödinger, care este folosită în descrierea particulelor fără spin

Miscarea relativista pentru particule cu spin 1/2
Ecuația lui Dirac

Ecuația lui Dirac este ecuația undelor a lui Schrödinger în varianta de cuantică relativistă pentru sisteme de particule cu spinul -1/2, cum ar fi electronii. Această ecuație impune existența pozitronului.

clasic : $E = mv^2/2 = p^2/2m$

relativistic: $E^2 = m^2 + p^2$ ⇒ 2 solutii: ⇒ $E = \pm\sqrt{m^2 + p^2}$



Această ecuație a fost obținută de Dirac ca urmarea tentativei de liniarizare a ecuației Klein-Gordon. Pentru aceasta a fost introdus un sistem liniar de patru ecuații cuplate. Forma compactă a aceste ecuații:

$$\left(i\gamma_\mu \partial^\mu - mI\right)\Psi = 0$$

în care funcția de undă este un bispinor cu 4 componente:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$$

γ^μ (μ = 0, 1, 2, 3) sunt matrici 4x4, iar I este o matrice identitate de dimensiune 4x4.

Din cele 4 componente (grade de libertate) ale bispinorului Ψ, două servesc la reprezentarea unei particule în stările de spin ±1/2 şi celelalte două la reprezentarea unei antiparticule din stările de spin ±1/2

ecuația lui Dirac este de fapt un sistem de patru ecuații cuplate

$$i\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi_3 - \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_4\right) - m\Psi_1 = 0$$

$$i\left(-\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi_1 - \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_2\right) - m\Psi_3 = 0$$

$$i\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi_4 - \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_3\right) - m\Psi_2 = 0$$

$$i\left(-\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi_2 - \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_1\right) - m\Psi_4 = 0$$