


## Sistemul natural de unități

Sistemul de unități internaționale (SI) - trei etaloane de măsură

[lungime]SI = 1 m (metru)

[timp]SI = 1 s (secundă)

[masă sau energie]SI = 1 kg (kilogram) sau 1 J (joule)



puțin practice la scară subatomică!!!  
(proprietățile relativiste și cuantice nu pot fi neglijate)

constante fundamentale - viteza luminii în vid,  $c$  și cuanta momentului cinetic  $\hbar$

În sistemul internațional

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 6.58 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s}, \text{ unde } 1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$$
$$1 \text{ eV (electron-volt)} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Pentru sisteme cuantice relativiste

- viteza ca fracțiune din viteza luminii  $c$
- momentul cinetic (*spin*) în termeni de unități  $\hbar$

sistemul de măsură în care unele **constante universale** sunt normate la unitate (egale numeric cu 1) poartă numele de **sistem de unități naturale (SUN)**

$$[viteza]_{\text{SUN}} = 1 c$$

$$[\text{momentul cinetic}]_{\text{SUN}} = 1 \hbar$$

$$[\text{energia}] = 1 \text{ eV cu multiplii } MeV = 10^6 \text{ eV, GeV} = 10^9 \text{ eV}$$

$$\hbar = c = 1$$

$$m_{\text{electron}} = 0.511 \text{ MeV}$$

Pentru metru - se împarte prin  $\hbar c$  (în SI se exprimă prin **MeV·s**)

$$\frac{1m}{c \cdot \hbar} = \frac{1m}{3 \cdot 10^8 \cdot m \cdot s^{-1} \cdot 6.58 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \cdot s} = 5.1 \cdot 10^{12} \text{ MeV}^{-1}$$

Pentru secundă se împarte prin  $\hbar$  (în SI se exprimă prin **MeV·s**)

$$\frac{1s}{\hbar} = \frac{1s}{6.58 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \cdot s} = 1.52 \cdot 10^{21} \text{ MeV}^{-1}$$

unitățile de lungime și de timp pot fi exprimate în sistemul natural de unități prin inversul unităților de energie !!!

$$[\text{lungime}]_{\text{SUN}} = [\text{masă sau energie}]^{-1}$$

$$[\text{timp}]_{\text{SUN}} = [\text{masă sau energie}]^{-1}$$

## Regulă generală

-o cantitate în sistemul SI care are dimensiunile  $[E^p L^q T^r]_{SI}$  cu  $E$ ,  $L$  și  $T$  reprezentând energia (în *Jouli*), lungimea (în *metri*) și timpul (în *secunde*), adică  $J^p \cdot m^q \cdot s^r$ , în SUN, aceste cantități vor fi exprimate în *energie* la puterea  $p-q-r$  adică  $E^{p-q-r}$ .

## Conversia din SI în SUN

dacă în SI,  $E$ ,  $L$  și  $T$  reprezintă unități de *energie*, *lungime* și *timp*, avem corespondența:

$$\begin{aligned} [E^p L^q T^r]_{SUN} &= \left[ E^p \left( \frac{L \cdot 2\pi}{h \cdot c} \right)^q \left( \frac{T \cdot 2\pi}{h} \right)^r \right]_{SI} = \left[ \frac{E^p L^q T^r (2\pi)^{q+r}}{c^q \cdot h^{q+r}} \right]_{SI} = \\ &= [E^p L^q T^r] \cdot (6.24 \cdot 10^9 \text{ MeV} \cdot J^{-1})^p \cdot (5.1 \cdot 10^{12} \text{ MeV}^{-1} \cdot m^{-1})^q \cdot (1.52 \cdot 10^{21} \text{ MeV}^{-1} \cdot s^{-1})^r \end{aligned}$$

$[A]_{SUN}$  și  $[A]_{SI}$  sunt mărimile în sistemul natural, respectiv în sistemul internațional

## Concret

Din SI la SUN se trece simplu prin înlocuirea *Joul*, *metru* și *secundă* prin factorii:

<i>Energie:</i>	$J \rightarrow 6.24 \cdot 10^{12} \text{ MeV}$
<i>Lungime:</i>	$m \rightarrow 5.1 \cdot 10^{12} \text{ MeV}^{-1}$
<i>Timp:</i>	$s \rightarrow 1.52 \cdot 10^{21} \text{ MeV}^{-1}$

Invers, din SUN în SI, unitățile asociate se fac prin conversia:

<i>Energie:</i>	$\text{MeV} \rightarrow 1.602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$
<i>Lungime:</i>	$\text{MeV}^{-1} \rightarrow 1.96 \cdot 10^{-13} \text{ m}$
<i>Timp:</i>	$\text{MeV}^{-1} \rightarrow 6.58 \cdot 10^{-22} \text{ s}$

Pentru sisteme cuantice relativiste, utilizarea sistemului de unități SUN are două mari avantaje: două etaloane sunt definite  $\hbar = c = 1$   
permite reprezentarea tuturor ecuațiilor

exemplu:

$$\underbrace{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4}_{\text{SI}} \Rightarrow \underbrace{E^2 = p^2 + m^2}_{\text{SUN}}$$

<b>Mărimea fizică</b>	<b>SI</b>	<b>SUN (<math>\hbar = c = 1</math>)</b>
masă	kg	$5.61 \times 10^{26} \text{ GeV}$
lungime	m	$5.07 \times 10^{15} \text{ GeV}$
timp	s	$1.53 \times 10^{24} \text{ GeV}$
sarcina electrică	C	$1.89 \times 10^{18}$
temperatura	K	$8.62 \times 10^{-14} \text{ GeV}$
forța	N	$1.37 \times 10^{-6} \text{ GeV}^2$
energia	J	$6.93 \times 10^9 \text{ GeV}$
puterea	W	$4.56 \times 10^{-15} \text{ GeV}^2$
potențialul	V	$29.7 \text{ GeV}$
câmpul electric	V/m	$5.86 \times 10^{-15} \text{ GeV}^2$
curentul	A	$9.58 \times 10^7 \text{ GeV}^{-1}$
inducția magnetică	T	$1.50 \times 10^{-8}$
flux magnetic	Wb	$3.86 \times 10^{23} \text{ GeV}^{-2}$
rezistența electrică	Ohm	$3.10 \times 10^{-7} \text{ GeV}^2$
capacitatea electrică	F	$4.49 \times 10^{28} \text{ GeV}^{-1}$
inductanța	H	$6.37 \times 10^{23} \text{ GeV}^{-1}$

## Formalismul relativist cuadridimensional

Teoria relativității -similitudinea timp - spațiu→ formalism cuadridimensional

vectorul de poziție spațială – timp,  $\mathbf{x}$  este reprezentat prin componentele contravariante  $x^\mu$  (indicele superior)

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x})$$

Într-un spațiu vectorial cu  $D$  dimensiuni este posibil de a adăuga  $D$  vectori în baza  $e^\mu$ , astfel că un vector  $\mathbf{A}$  poate fi scris în 4 dimensiuni astfel:

$$\mathbf{A} = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu \cdot \mathbf{e}_\mu = A^\mu \cdot \mathbf{e}_\mu$$

*(formalismul Einstein în care se repetă indicele covariant – contravariant)*

Produsul scalar a doi vectori  $\mathbf{A}$  și  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^\mu e_\mu B^\nu e_\nu = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu}$$

$$g_{\mu\nu} = e^\mu \cdot e^\nu - \text{tensor matricial sau metrică}$$

Se poate alege o bază unde vectorii sunt ortogonali:  $g_{\mu\nu} = 0$  dacă  $\mu \neq \nu$

ca urmare

$$A \cdot B = A^\mu \cdot B^\nu \cdot e_{\mu\nu}^2$$

Pentru cazul **cuadridimensional spațiu – timp**, în spațiul Minkovski, lungimea cuadridimensională a unui **vector de poziție spațiu – timp** este realizat pe un interval

$$x^2 = x^\mu \cdot x^\mu \cdot e_{\mu\nu}^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Astfel că, norma vectorilor de bază va fi:

$$e_\mu^2 = \begin{cases} 1, & \mu = 0 \\ -1, & \mu = 1,2,3 \end{cases}$$

iar tensorul metric

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Componentele covariante (indice inferior) sunt proiecțiile ortogonale ale lui  $\mathbf{A}$  pe vectorii de bază  $\mathbf{e}_\mu$

$$\text{Exemplu: } \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_\mu$$

Sau (se notează indicele inferior)

$$\mathbf{A}_\mu \equiv \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{A} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{A}^\nu \cdot \mathbf{e}_\nu = \mathbf{g}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{A}^\nu$$

tensorul metric  $\mathbf{g}_{\mu\nu}$  și inversul său  $\mathbf{g}^{\mu\nu}$  coincid  $\mathbf{g}_{\mu\nu} = (\mathbf{g}_{\mu\nu})^{-1} = \mathbf{g}^{\mu\nu}$

$$\text{Prin urmare } \mathbf{g}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{g}_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu$$

$$\text{De unde rezultă } \mathbf{A}^\mu = \mathbf{g}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{A}_\nu$$

$$\text{deci } \mathbf{g}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{g}_{\mu\nu} = 4$$



## Cuadrivectorul de poziție

componentele covariante:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x})$$

componentele contravariante

$$x_\nu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = g_{\mu\nu} x^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$$

Prin urmare

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x})$$

$$x_\mu = (x^0, -\mathbf{x})$$

## Cuadrivectorul energie – impuls

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$$

$E = \gamma \cdot m_0$  - energia totală

$p_i$  ( $i = x, y, z$  sau  $1, 2, 3$ ) - componentele impulsurilor

$m_0$  - masa de repaus

Energia cinetică  $K = E - m_0 = (\gamma - 1)m_0$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{factor Lorentz}$$

Cuadrivectorul  $p^\mu$  este un invariant Lorentz: (se lucrează în SUN, adică  $c = 1$ )

$$p^2 = g_{\alpha\beta} \cdot p^\alpha \cdot p^\beta = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m_0^2$$

Așadar,

$$E^2 - p^2 = m_0^2$$

sau

$$E^2 = p^2 + m_0^2$$

## Conservarea energiei și impulsului pentru un sistem de particule

### Cuadrivectorul energie – impuls total

$$p^\mu = \sum_n p_n^\mu$$

$p_n^\mu$  - impulsul cuadridimensional al particulei n

conservarea energiei și impulsului  $p_{\text{init}}^\mu = p_{\text{final}}^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ )

Pentru  $\mu = 1, 2, 3 = i$  avem conservarea impulsului total:

$$p_{\text{init}}^i = p_{\text{final}}^i \quad \text{sau} \quad p_{\text{init}} = p_{\text{final}}$$

Pentru  $\mu = 0$  avem conservarea energiei totale:

$$p_{\text{init}}^0 = p_{\text{final}}^0 \quad \text{sau} \quad E_{\text{init}}^{\text{tot}} = E_{\text{final}}^{\text{tot}}$$

## Relația în sistemul centrului de masă

**Premize:**  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Conservarea energiei – impuls total ( } p^\mu \text{ se conservă)} \\ \text{Mărimea (} E^2 - p^2 \text{) este un invariant relativist} \\ \text{(are aceeași mărime în toate sistemele de referință)} \end{array} \right.$

într-un sistem de referință S:  $(p_{\text{init}}^\mu)_S^2 = (p_{\text{final}}^\mu)_S^2$

în alt sistem S':  $(p_{\text{init}}^\mu)_S^2 = (p_{\text{final}}^\mu)_S^2 = (p_{\text{final}}^\mu)_{S'}^2$  (invariant relativist)

### Consecință:

într-un proces de interacțiune cantitatea  $p^2 = p^\mu p_\mu$  se conservă în orice sistem de referință

în sistemul centrului de masă (SCM)

– centrul de masă al sistemului este în repaus, impulsul este nul)

$$(p_{\text{init}}^\mu)_S^2 = (p_{\text{final}}^\mu)_S^2 = (p_{\text{init}}^\mu)_{\text{SCM}}^2 = (p_{\text{final}}^\mu)_{\text{SCM}}^2$$

Întrucât, în SCM vectorul impuls este nul  $|\mathbf{p}| = 0$

$$(p_{\text{init}}^\mu)_{\text{SCM}}^2 = (p_{\text{init}}^0)_{\text{SCM}}^2 - (|\mathbf{p}|_{\text{init}})_{\text{SCM}}^2 = (p_{\text{init}}^0)_{\text{SCM}}^2 = (E_{\text{init}}^{\text{tot}})_{\text{SCM}} = \left( \sum_n E_n \right)_{\text{SCM}}^2$$

## Noțiuni de mecanică cuantică relativistă

În **mecanica clasică**, mișcarea unei particule sau a unui grup de particule poate fi exprimată în termeni de poziție a particulei al un anumit moment

În **mecanica cuantică**, o stare (sau o mișcare) a unei particule este exprimată în termeni de funcții de undă care reprezintă probabilitatea ca o particulă să ocupe o anumită poziție la un moment dat. Cu ajutorul operatorilor putem obține în principal valorile observabilelor, cum ar fi impulsul, energia, etc.

În **mecanica cuantică relativistă**, o stare sau o mișcare este exprimată în spațiu și timp. Ecuațiile de mișcare sunt exprimate cu ajutorul lagrangianului

## Miscarea nerelativista pentru particule cu spin 0

Relatia energie-impuls in mecanica clasica

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V = E$$

Transformari in mecanica cuantica

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \mathbf{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla,$$

sau 
$$H \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \mathbf{p} \equiv \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right) = -i\hbar \nabla$$

Miscarea unei particule caracterizata de functia de unda  $\Psi$ , intr-un camp de forte este data de ecuatia Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$|\psi|^2$  – reprezinta probabilitatea de a gasi particula de masa  $m$  intr-un punct spatial caracterizat de coordonatele  $(x,y,z)$

## Miscarea relativista pentru particule cu spin 0

### Ecuatia Klein – Gordon

Trecerea de la mecanica cuantica la mecanica cuantica relativista se face practic prin generalizarea ecuatiei lui Schrödinger pentru un sistem relativist.

Într-un spațiu cuadridimensional ( $\hbar = c = 1$ ) se scrie

$$p^\mu = \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \nabla \right) = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\partial^\mu$$

Relatia relativista energie-impuls

$$p_\mu p^\mu = E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2$$

Substituind mărimile din ecuația Schrödinger relativista cu reprezentările operatoriale ( $\hbar = c = 1$ ) se obține ecuația Klein – Gordon

$$\left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \Psi - (-i\hbar \nabla)^2 \Psi = m^2 \Psi \Leftrightarrow -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \nabla^2 \Psi = m^2 \Psi$$

sau

$$0 = -\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\Psi + m^2\Psi = \left(-\partial_\mu\partial^\mu - m^2\right)\Psi = \left(p^2 - m^2\right)\Psi$$

$$-\partial_\mu\partial^\mu\Psi - m^2\Psi = 0$$

Ecuția Klein – Gordon

$$p^\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\partial^\mu$$

In care

$$p_\mu = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} = -i\partial_\mu$$

**Ecuția Klein – Gordon** este versiunea relativistă a ecuației lui Schrödinger, care este folosită în descrierea particulelor fără spin



## Miscarea relativista pentru particule cu spin 1/2

### Ecuatia lui Dirac

Ecuatia lui Dirac este ecuatia undelor a lui Schrödinger în varianta de cuantică relativistă pentru sisteme de particule cu spinul -1/2, cum ar fi electronii. Această ecuație impune existența pozitronului.

clasic :

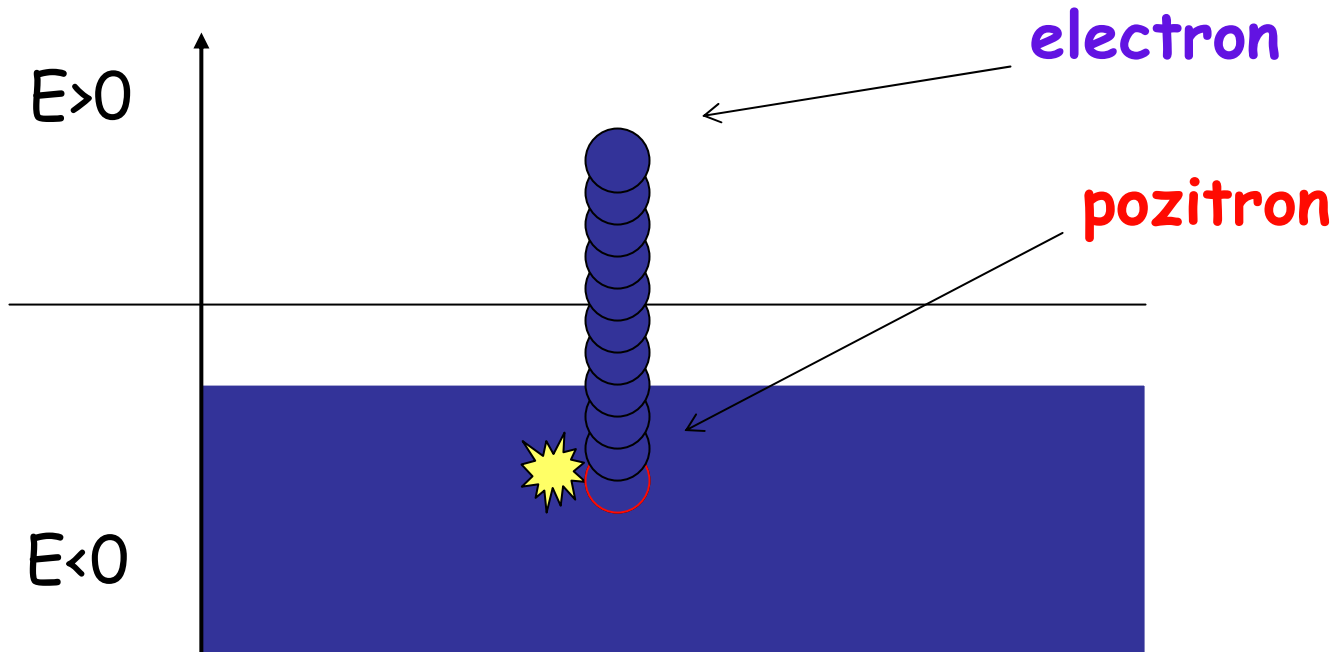
$$E = mv^2/2 = p^2/2m$$

relativistic:

$$E^2 = m^2 + p^2$$

2 solutii:

$$E = \pm \sqrt{m^2 + p^2}$$



Această ecuație a fost obținută de Dirac ca urmare a tentativei de liniarizare a ecuației Klein-Gordon. Pentru aceasta a fost introdus un sistem liniar de patru ecuații cuplate. Forma compactă a acestei ecuații:

$$(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - mI)\Psi = 0$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$$

în care funcția de undă este un bispinor cu 4 componente:

$\gamma^{\mu}$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) sunt matrici 4x4, iar  $I$  este o matrice identitate de dimensiune 4x4.

Din cele 4 componente (grade de libertate) ale bispinorului  $\Psi$ , două servesc la reprezentarea unei **particule** în stările de spin  $\pm 1/2$  și celelalte două la reprezentarea unei **antiparticule** din stările de spin  $\pm 1/2$

**ecuația lui Dirac este de fapt un sistem de patru ecuații cuplate**

$$i\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi_3 - \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_4\right) - m\Psi_1 = 0$$

$$i\left(-\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi_1 - \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_2\right) - m\Psi_3 = 0$$

$$i\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi_4 - \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_3\right) - m\Psi_2 = 0$$

$$i\left(-\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi_2 - \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_1\right) - m\Psi_4 = 0$$